MOMSTER: Travail de mathématiques

Module d'apprentissage
Sujet : météores, ellipse, tangente
Domaine : Mathématiques
Groupe cible : 3e année de l'enseignement secondaire, 6-8 heures de mathématiques
Format d'apprentissage : Théorie + Exercices
Durée : environ 3 heures
Théorie ? Oui
Rechercher des informations de manière autonome ? Non
Créer par vous-même ? Non

Résultats de l'apprentissage :
Résultats d'apprentissage spécifiques :

Auteurs: Stijn Calders, Mieke Sterken.
Merci à: Alex Calders, Natacha Ghesquière (UGent, Sint-Bavohumaniora), Karolien Lefever (BIRA).
Traductions (FR): Karolien Lefever, Stéphanie Fratta (IASB).

INTRODUCTION

L'Institut royal d'Aéronomie Spatiale de Belgique (IASB) étudie les météores dans notre atmosphère dans le cadre de son projet BRAMS (Belgian RAdio Meteor Stations).

Tous les météores ne sont pas visibles à l'œil nu : ils sont difficiles ou impossibles à voir pendant la journée, et même par temps nuageux, on ne peut pas les observer optiquement. En outre, la majorité des météoroïdes (les "fragments" qui pénètrent dans l'atmosphère depuis l'espace) sont si petits que les météores (= l'effet visible, également appelé "étoile filante") sont à peine ou pas visibles pour nous.

Pour détecter les météores, l'IASB utilise un réseau unique de récepteurs radio répartis dans toute la Belgique, en combinaison avec un émetteur radio (la "balise") situé à Dourbes (province de Namur). Cet émetteur envoie en permanence dans l'atmosphère des signaux radio qui sont réfléchis sur la traînée d'ionisation des météores dans la partie supérieure de l'atmosphère. Comment les chercheurs de **BRAMS connaissent-ils la trajectoire des météoroïdes à partir de ce dispositif ?**

POURQUOI VOULONS-NOUS DÉTERMINER L'ORBITE DU MÉTÉOROÏDE ?

POUR LA PLUPART DES CHOSES QUE NOUS VOULONS ÉTUDIER, L'ORBITE DU MÉTÉOROIDE EST IMPORTANTE :

- POUR DISTINGUER LES MÉTÉOROÏDES EN ESSAIM DES MÉTÉOROÏDES SPORADIQUES
- POUR DÉTERMINER LE NOMBRE DE MÉTÉOROÏDES QUI PENETRENT DANS L'ATMOSPHÈRE, CE QUI EST IMPORTANT POUR LES VOYAGES SPATIAUX (INTERPLANÉTAIRES)
- POUR CALCULER LES PARAMÈTRES PHYSIQUES (TELS QUE L'IONISATION, LA MASSE, ...) DES MÉTÉORES/MÉTÉORIDES INDIVIDUELS.
- POUR DÉTERMINER LES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DE LA HAUTE ATMOSPHÈRE (TELLES QUE LA TEMPÉRATURE ET LA VITESSE DU VENT)

- ...

***

Pour déterminer l'orbite du météoroïde, l'équipe de BRAMS utilise certaines propriétés mathématiques des ellipses. Dans un premier temps, nous allons les étudier ; ensuite nous les appliquerons à des observations radio d'un vrai météore.

Les ELLIPSES

Une ellipse est définie comme un ensemble de points pour lesquels la somme des distances à deux points choisis (les foyers) a une valeur fixe.
Les foyers sont communément appelés F1 et F2.

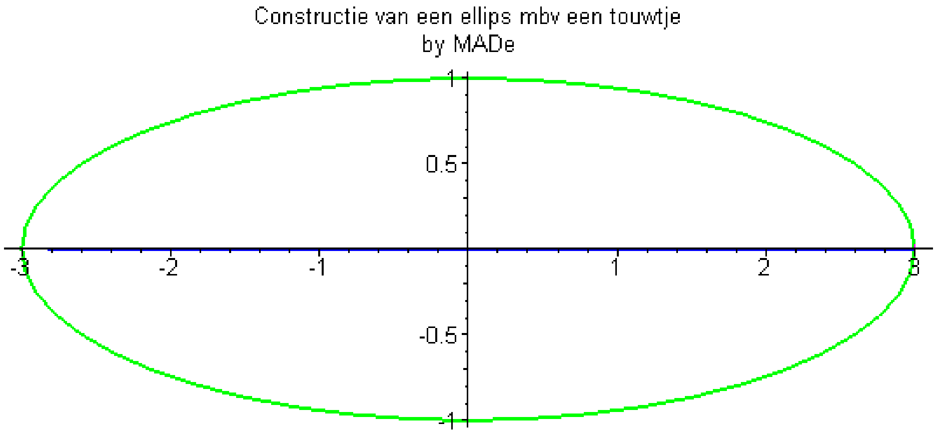

Figure 1 : L'ellipse : dans cet exemple, les foyers F1 et F2 sont en (-2,8, 0) et (+2,8, 0) dans le système de coordonnées. A partir de la figure, on peut déduire que la somme des distances des deux foyers à un point de l'ellipse est constante et vaut 6. (Source : Wikipedia, auteur : MADe, licence : CC-BY-SA).

En d'autres termes : si l'on donne 2 points F1 et F2, et un nombre fixe (positif) a, alors l'ensemble des points P pour lesquels d (P, F1) + d (P, F2) = 2a est une ellipse.

CONSEIL : FAITES LE TEST !
POUR DESSINER UNE ELLIPSE, DEUX PUNAISES ET UN BOUT DE FICELLE SUFFISENT : ESSAYEZ.
AH OUI, VOUS AUREZ AUSSI BESOIN D'UN CRAYON.
***

Remarquez que deux foyers et un point d'une ellipse déterminent l'ellipse complètement.

Pourquoi cette ellipse est-elle si importante ?

- La loi de réflexion spéculaire en physique stipule que l'angle entre le rayon incident et la trajectoire du météore est égal à l'angle entre le rayon réfléchi et la trajectoire du météore.

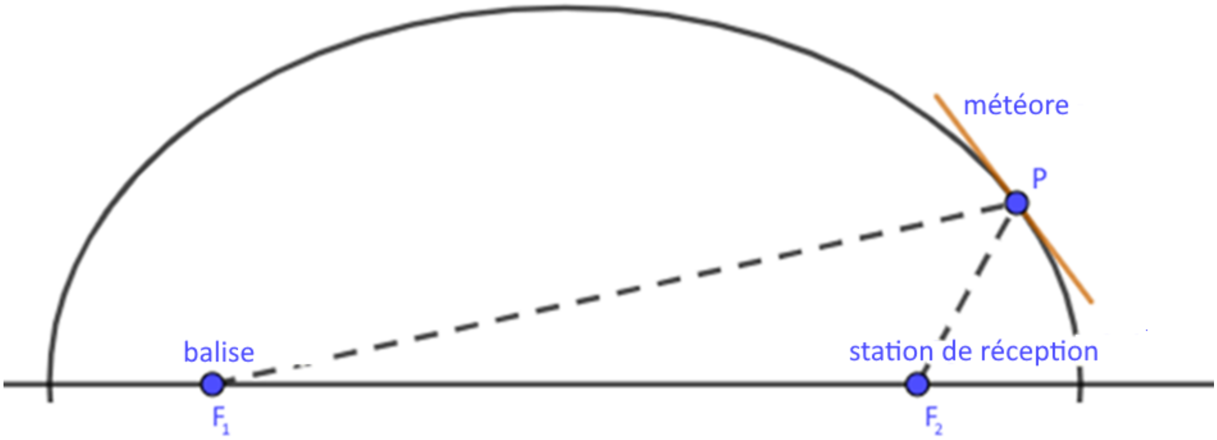

Figure 2 : La ligne rouge représente le météore. La loi de la réflexion spéculaire en physique stipule que l'angle entre le rayon incident et le météore doit être égal à l'angle entre le rayon réfléchi et la trajectoire du météore.

- Si un signal radio est émis par la balise (point F1), réfléchi en un point P et envoyé à une station de réception (point F2), la trajectoire du météoroïde est décrite par la droite qui fait des angles égaux avec les segments F1P et F2P.

- Nous allons le montrer :
si E est l'ellipse ayant pour foyers F1 et F2 et passant par le point P,
la tangente à E en E est la ligne qui fait des angles égaux à F1P et F2P.

Si nous pouvons le prouver, nous savons alors que la trajectoire du météoroïde est la tangente à l'ellipse.

Dans les parties suivantes, nous allons :

A. Montrer que si l'angle incident et l'angle réfléchi sont égaux, la droite est la tangente à l'ellipse.

B. Déterminer l'équation d'une ellipse (géométrie analytique).

C. Déterminer l'équation de la tangente à une ellipse en un point de l'ellipse (analyse).

Nous illustrons ensuite comment nous appliquons ces connaissances pour déterminer la trajectoire des météores dans le cadre du projet BRAMS.

A La trajectoire du météore est la tangente à l'ellipse.

Propriéré :

Si P est un point sur l'ellipse E (avec les foyers F1 et F2) r est une droite passant par P telle que les angles de r avec F1P et F2P sont égaux alors r est la tangente à l'ellipse dans P.

Preuve :

Une ligne est une tangente si et seulement si elle a un seul point commun avec l'ellipse. Nous allons montrer que P est le seul point de la tangente r qui se trouve sur l'ellipse E.

- On prend le point F sur la droite F1P telle que | PF | = | PF2 |.
- Nous prenons un point arbitraire T, différent de P, sur la ligne r

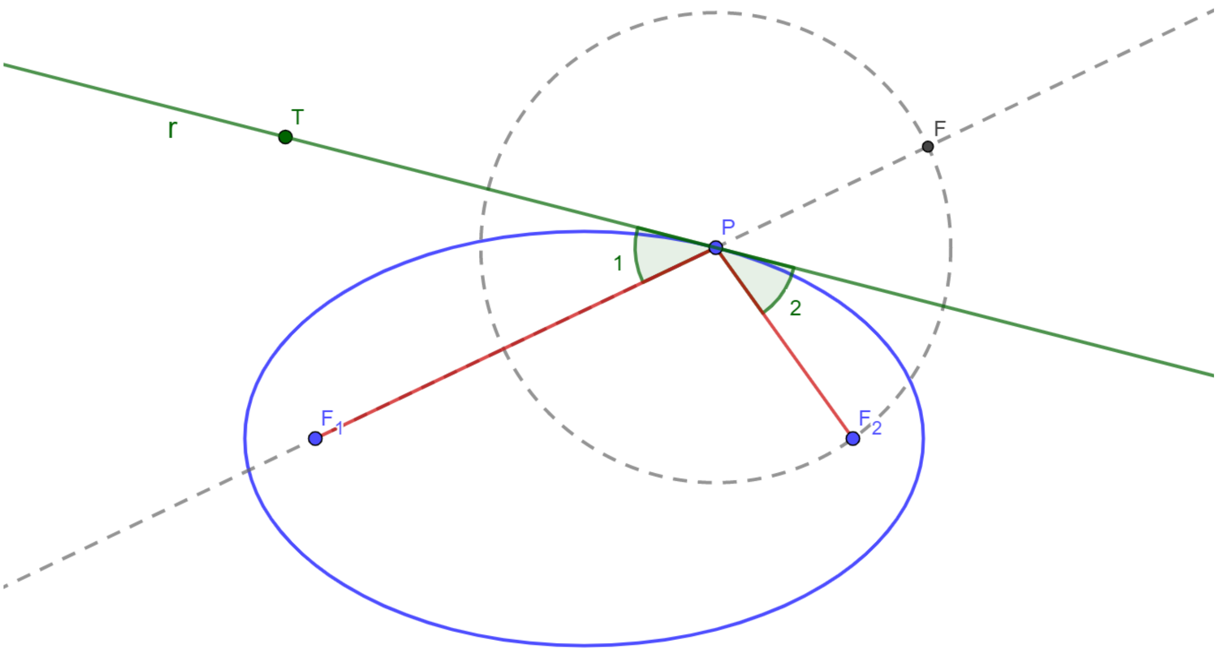

Figure 3 : Construction géométrique pour prouver que si les deux angles sont égaux, la droite r est la tangente à l'ellipse.

Explication :

- | TF | = | TF2 | (car triangle isocèle)

- Nous savons que dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.
Donc dans le triangle TF1F, | TF1 | + | TF | > | F1F |=2a

- Ainsi, | TF1 | + | TF2 | > 2a. Donc T ne se trouve pas sur l'ellipse.

Nous avons maintenant prouver que seul le point P de la droite se trouve sur l'ellipse, donc cette droite est la tangente à l'ellipse en P.

B L'équation de l'ellipse

Étant donné :
- Deux foyers F1 et F2, la distance entre les points est appelée 2c
- Un nombre positif a, supérieur à c

Objectif : Trouver l'équation de l'ellipse formée par les points P pour lesquels la somme des distances aux foyersest égale à 2a.

B1. Choix d'un système de coordonnées

Nous choisissons d'abord un système de coordonnées (avec la longueur unitaire comme unité pour les axes x et y) avec L'axe x défini dans la même direction que le segment F1F2 et avec l'origine comme milieu du segment F1F2 .

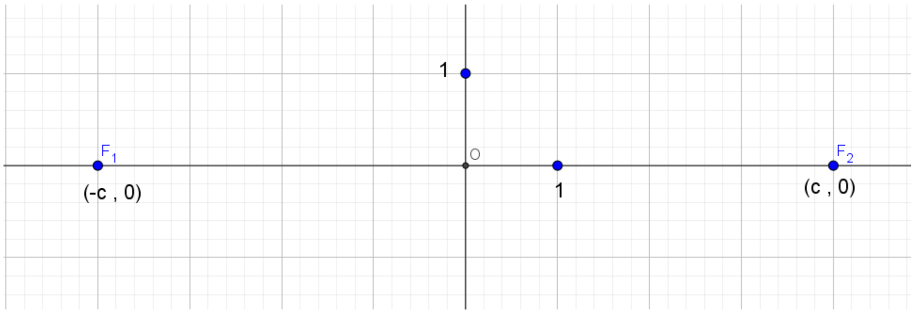

Figure 4 : Système d'axes choisi pour dériver l'équation de l'ellipse.

B2. Equation de l'ellipse
Equation de l'ellipse avec
2c comme la distance entre les foyers
2a comme la somme des distances d'un point aux foyers

$$\text{Un point } P\ (x, y) \text{bappartient à l'ellipse}$$
$$\Updownarrow$$
$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Les coordonnées de F1 sont (-c , 0), et celles de F2 sont (c , 0).

Utilisez la formule de la distance entre deux points pour écrire la dernière condition.

C'est une équation irrationnelle.
Supprimez les racines en les élevant au carré, et réduisez l'équation à $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ où $b^2 = a^2 - c^2$.

Conclusion :

L'équation de l'ellipse avec 2c comme distance entre les foyers,
2a comme la somme des distances entre un point et les foyers et

$b^2 = a^2 - c^2$ is $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

C. L'équation de la tangente d'une ellipse.

Étant donné : l'ellipse E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et le point P (x_0 , y_0) $\in$ E

L'équation de la tangente à E en P est $\frac{x_0.x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$

- Nous savons que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. donc y est une fonction de x.

- Si nous dérivons cette formule (en nous rappelant que y est une fonction de x), nous trouvons : $\frac{2 \cdot x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0$. A partir de là, nous obtenons la formule pour y' : $y' = -\frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$.

  La pente de la tangente dans P est la dérivée au point (x0 , y0) . Nous le trouvons en remplissant la formule x et y avec les coordonnées du point P : $pente\ \mathrm{r} = -\frac{b^2.x_0}{a^2.y_0}$

- Alors l'équation de la tangente est $y - y_0 = -\frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0}(x - x_0)$

  Nous multiplions les deux membres par $\frac{y_0}{b^2}$, plaçons les termes avec x et y dans le membre de gauche et les termes constants dans le membre de droite.

  Nous trouvons: $\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2}$

et puisque P se trouve sur l'ellipse, le membre de droite est égal à 1.

Application aux observations radio de météores

Dans le projet BRAMS, nous voulons déterminer l'orbite d'un météoroïde. Pour ce faire, nous utilisons la différence de temps entre les observations des différentes stations de réception.

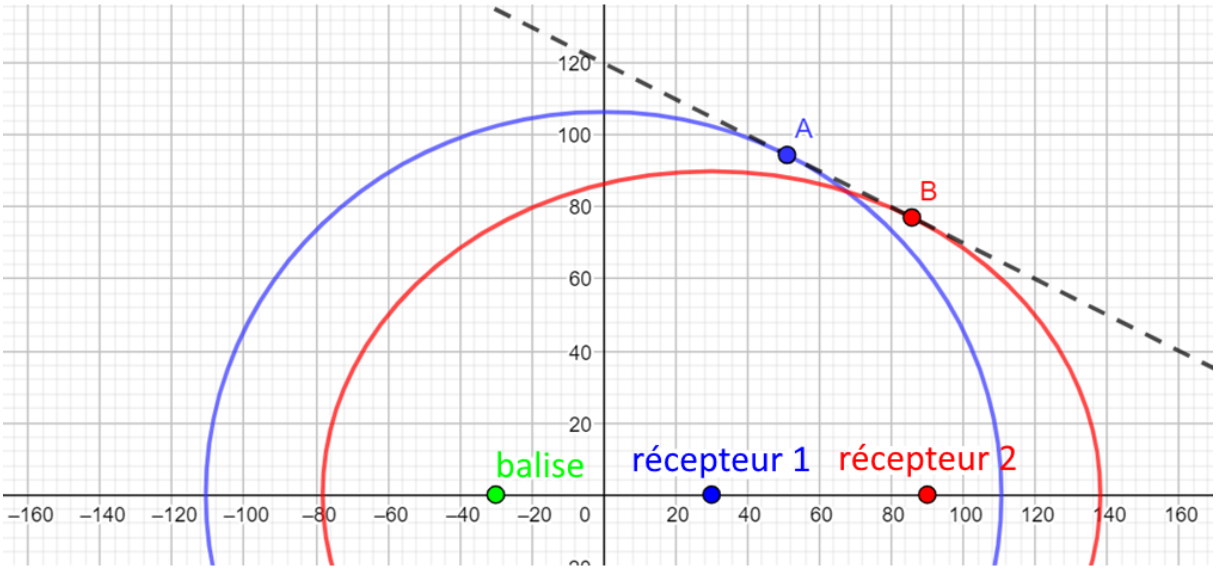

Figure 5 : Le même météoroïde est détecté par différentes stations de réception, avec une certaine différence de temps. A partir de là, nous pouvons déterminer l'orbite du météoroïde.

Le problème direct

Mais commençons simplement : nous connaissons la trajectoire du météoroïde, et nous voulons calculer les points de réflexion (A et B dans la figure 5) pour différentes paires de balises et de récepteurs. C'est ce qu'on appelle le problème direct.

Nous faisons les hypothèses suivantes :
- La position de la balise et des récepteurs est donnée.
- La trajectoire du météoroïde est donnée (et nous supposons qu'il s'agit d'une ligne droite)
- La vitesse du météoroïde est donnée (et nous supposons qu'elle est constante)

Nous pouvons maintenant calculer la différence de temps entre les signaux provenant des différents points de réflexion.

Exercice

Étant donné que :
- Le premier récepteur se trouve à 60 km (à droite) de la balise, et le second à 120 km de la balise, du même côté.
- La trajectoire du météore satisfait à l'équation : y=-0,5x+120 (en km)
- La vitesse du météoroïde est de 50 km/s.

Question:
Quelle est la différence de temps entre les signaux reçus par les deux récepteurs ?

Rappel:

Equation de l’ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

avec:

- 2c: distance entre les deux foyers
- 2a: somme des distances entre un point de l'ellipse et les deux foyers.
- $b^2=a^2-c^2$

Equation de la tangente:

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$$

Solution:

Réécrire l’équation du météore

$$\frac{1}{240}x+\frac{1}{120}y=1$$

Déterminer le premier point de réflexion

Nous savons que la trajectoire du météore est tangente à l'ellipse. Donc:

$$\begin{cases}\dfrac{x_0}{a^2}=\dfrac{1}{240}\\ \dfrac{y_0}{b^2}=\dfrac{1}{120}\end{cases}$$

Puisque $b^2=a^2-c^2$ (avec c=30):

$$\begin{cases}a^2=240x_0\\ \dfrac{y_0}{a^2-30^2}=\dfrac{1}{120}\rightarrow y_0=\dfrac{1}{120}a^2-7{,}5\end{cases}$$

Donc:

$$y_0=2x_0-7{,}5$$

Nous savons également que le point doit se trouver sur la trajectoire du météore. Donc:

$$\begin{cases}y_0=2x_0-7{,}5\\ y_0=-0{,}5x_0+120\end{cases}$$

Ou:

$$2x_0-7{,}5=-0{,}5x_0+120$$
$$2{,}5x_0=127{,}5$$
$$x_0=51$$

Maintenant nous pouvons déterminer y_0, a et b:

$$y_0=2*51-7{,}5=94{,}5$$
$$a^2=240*51=12240\ \rightarrow a\approx 110{,}6$$
$$b^2=12240-30^2=11340\rightarrow b\approx 106{,}5$$

Détermination du deuxième point de réflexion

Notons que l'équation de l'ellipse n'est valable que si l'origine du système d'axes passe par le centre des deux foyers. Pour le premier point de réflexion, celui-ci se trouve à 30 km de la balise. Pour le second point de réflexion, le centre des foyers est à 60 km de la balise. Le système de coordonnées se déplace donc de 30 km.

Nous devons ajuster l'équation de la trajectoire du météore en conséquence. Dans l'équation originale, la hauteur du météore est de 120 km au point zéro. Dans la nouvelle équation, nous avons :$y=-0{,}5*30+120=105$

Donc l'équation est maintenant:

$$y = -0{,}5x + 105$$

Ensuite, le calcul est similaire à celui du premier point de réflexion :

Nous savons que la trajectoire du météore est tangente à l'ellipse. Donc :

y=-0,5*30+120=105

y=-0.5x+105

$$\begin{cases} \frac{x_0}{a^2} = \frac{1}{210} \\ \frac{y_0}{b^2} = \frac{1}{105} \end{cases}$$

Vu que $b^2=a^2-c^2$ (avec c=60):

$$\begin{cases} a^2 = 210x_0 \\ \frac{y_0}{a^2 - 60^2} = \frac{1}{105} \rightarrow y_0 = \frac{1}{105}a^2 - \frac{60^2}{105} \end{cases}$$

Donc:

$$y_0 = 2x_0 - \frac{60^2}{105}$$

Nous savons également que le point doit se trouver sur la trajectoire du météore. Alors:

$$\begin{cases} y_0 = 2x_0 - \frac{60^2}{105} \\ y_0 = -0{,}5x_0 + 105 \end{cases}$$

Ou:

$$2x_0 - \frac{60^2}{105} = -0{,}5x_0 + 105$$
$$2{,}5x_0 = \frac{105^2 + 60^2}{105}$$
$$2{,}5x_0 \approx 139$$
$$x_0 \approx 55{,}7$$

Maintenant nous pouvons déterminer y_0, a et b :

$$y_0 = -0{,}5 * 55{,}7 + 105 \approx 77{,}1$$
$$a^2 = 210 * 55{,}7 = 11700 \ \rightarrow a \approx 108{,}2$$
$$b^2 = 11700 - 60^2 = 8100 \rightarrow b \approx 90$$

(x0,y0) est maintenant dans le système d'axe XY'. Pour revenir au système d'axe XY:

$$x_0 \approx 55{,}7 + 30 \approx 85{,}7$$
$$y_0 = -0{,}5x_0 + 120 = -0{,}5 * 85{,}7 + 120 \approx 77{,}1$$

Il fallait s'attendre à ce que la coordonnée y soit la même!

Déterminer la distance entre les deux points de réflexion
- Point de réflexion 1 : (51 ; 94,5) km
- Point de réflexion 2 : (85,7 ; 77,1) km

$$|p1\,p2| = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2} \approx 38{,}8$$

Ainsi, la distance entre les deux points est d'environ 38,8 km. Cette distance est parcourue par un météoroïde dont la vitesse est de 50 km/s en 0,776 s.

Le problème inverse

Dans ce qui précède, nous sommes partis de la cause (la trajectoire et la vitesse du météoroïde) pour calculer les observations (différences de temps entre les différentes stations de réception). Cependant, en pratique, nous avons les observations, et nous devons retrouver la cause. C'est ce qu'on appelle le problème inverse, et c'est un domaine de recherche important (et compliqué) en mathématiques appliquées.

Dans le plan xy, nous avons quatre inconnues :

- Position d'un point de réflexion (x, y)
- Le vecteur vitesse du météore (vx, vy)

Si nous avons détecté le météore avec quatre stations de réception différentes, nous pouvons déterminer quatre différences de temps.
Nous faisons maintenant une hypothèse raisonnable sur la trajectoire et la vitesse du météoroïde. Grâce à la méthode directe (voir ci-dessus), nous pouvons calculer les différences de temps théoriques. Celles-ci sont comparées aux différences de temps mesurées. Si les différences de temps calculées et mesurées sont les mêmes, alors nous avons terminé : nous avons déterminé la trajectoire et la vitesse du météoroïde. Si elles ne sont pas les mêmes, nous faisons une nouvelle hypothèse de trajectoire.

Le problème inverse en trois dimensions

Jusqu'à présent, nous avons toujours supposé que le météore se déplaçait dans un plan. En réalité, bien sûr, nous vivons dans un monde tridimensionnel. Dans ce cas, le météore n'est pas tangent à une ellipse (une figure plane) mais à un ellipsoïde (son équivalent en trois dimensions).
Pour le problème inverse décrit ci-dessus, nous avons maintenant six inconnues. Nous avons donc besoin d'observations provenant de six stations différentes pour mesurer six différences de temps.

scène 3 le 11
Mars0000-0312.mp4

Animation: météore au-dessus de la Belgique